Evaluation sur les complexes et les équations différentielles du second ordre.

Exercice 1 : résoudre une équation différentielle du second ordre.

On fournit les formules suivantes :

Équations	Solutions sur un intervalle I
Équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ Équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ.	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique. Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ où r est la racine double de l'équation caractéristique. Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

Dans chaque cas, donner l'ensemble des solutions des équations différentielles données :

$y'' - 2y' + y = 0$ $\qquad$ $y'' + y' + 2y = 0$ $\qquad$ $y'' - 3y' + 2y = 0$

On donne comme conditions initiales f(0)=0 et f'(0)=1

Déterminer la solution de l'équation différentielle pour le cas n°3.

Exercice 2 : résoudre une équation différentielle du second ordre avec second membre.

On cherche à résoudre l'équation différentielle : (E) : $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$

1) Résoudre l'équation différentielle (E') homogène associée : $y'' - 6y' + 9y = 0$
2) Vérifier que la fonction $g(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{3x}$ est une solution particulière de (E) .
3) Donner l'ensemble des solutions de (E).
4) On donne f(0)=0 et f'(0)=1. Donner la solution de (E) qui vérifie les conditions initiales.

Exercice 3 : utilisation d'un logiciel.

```
desolve(y''+3y'+y=exp(x),y)
```

$$c\_0 *\exp(\frac{x*(\sqrt{5}-3)}{2})+c\_1 *\exp(\frac{x*(-(\sqrt{5})-3)}{2})+\frac{3*\exp(x)}{781}$$

En observant la console du logiciel XCAS, répondre aux questions suivantes :

1) Ecrire l'équation différentielle à résoudre (E)
2) Ecrire l'équation différentielle homogène associée (H).
3) Ecrire les solutions de l'équation (H)
4) Ecrire une solution particulière de l'équation différentielle (E)

bonus : résoudre une équation différentielle du premier ordre.

Cours : $y' + ay = b \Leftrightarrow y = Ke^{-ax} + \frac{b}{a}$

Soit (E) l'équation différentielle : $y' + 2y = 2x$

1) Résoudre l'équation différentielle (H) : $y' + 2y = 0$
2) Tester la fonction f définie $f(x) = x - \frac{1}{2}$ comme solution particulière de (E)
3) En déduire les solutions de l'équation (E)
4) On donne comme conditions initiales $g(0) = 0$. Trouver l'expression de g.

Joker : trouver en utilisant les conditions initiales de l'exercice 1, les autres cas.

Eléments de correction

1) *Calcul de EC : 1 pt*
2) *Solutions générales : 1 pt*
3) *Solution particulière 2*

Exercice 1 (2+2+2+2=8 points)

```
(%i1) ode2('diff(y,x,2)-2*'diff(y,x)+y=0, y, x);
```
(%o1) $y=(\%k2\,x+\%k1)\,\%e^{x}$

```
(%i2) ic2(%o1, x=0, y=0, 'diff(y,x)=1);
```
(%o2) $y=x\,\%e^{x}$

```
(%i3) ode2('diff(y,x,2)+'diff(y,x)+2*y=0, y, x);
```
(%o3) $y=\%e^{-\frac{x}{2}}\left(\%k1\sin\left(\frac{\sqrt{7}\,x}{2}\right)+\%k2\cos\left(\frac{\sqrt{7}\,x}{2}\right)\right)$

```
(%i4) ic2(%o3, x=0, y=0, 'diff(y,x)=1);
```
(%o4) $y=\frac{2\,\%e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{7}\,x}{2}\right)}{\sqrt{7}}$

```
(%i5) ode2('diff(y,x,2)-3*'diff(y,x)+2*y=0, y, x);
```
(%o5) $y=\%k1\,\%e^{2\,x}+\%k2\,\%e^{x}$

```
(%i6) ic2(%o5, x=0, y=0, 'diff(y,x)=1);
```
(%o6) $y=\%e^{2\,x}-\%e^{x}$

Exercice 2 (8 points)

1) *H : EC+sol : 1+1 points*
2) *Sol particulière : dérivées et test : 1+1+1 points*
3) *Sol générale : 1 point*
4) *CI : 1+1=2 points*

```
(%i8) ode2('diff(y,x,2)-6*'diff(y,x)+9*y=exp(3*x), y, x);
```
(%o8) $y=\frac{x^2\,\%e^{3\,x}}{2}+(\%k2\,x+\%k1)\,\%e^{3\,x}$

```
(%i9) ic2(%o8, x=0, y=0, 'diff(y,x)=1);
```
(%o9) $y=\frac{x^2\,\%e^{3\,x}}{2}+x\,\%e^{3\,x}$

Exercice 3 (4 points).

1) *1 point*
2) *1 point*
3) *1 point*
4) *1 point*

```
desolve(y''+3y'+y=exp(x),y)
```

$$c\_0 *\exp(\frac{x*(\sqrt{5}-3)}{2})+c\_1 *\exp(\frac{x*(-(\sqrt{5})-3)}{2})+\frac{3*\exp(x)}{781}$$

1) Equation différentielle (E) : $y'' + 3y' + y = e^x$
2) Equation différentielle homogène associée (H) : $y'' + 3y' + y = 0$
3) Solutions de l'équation (H) : $y(x) = c_0 e^{\frac{\sqrt{5}-3}{2}x} + c_1 e^{\frac{-\sqrt{5}-3}{2}x}$
4) Solution particulière de l'équation différentielle (E) : $y(x) = \frac{3e^x}{781}$

Bonus

$$(E): y' + 2y = 2x$$

1) (H) : $y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y = Ce^{-2x}$
2) $f(x) = x - \frac{1}{2}$ solution particulière de (E)

$f'(x) = 1$ Dans (E) on a $y' + 2y = 1 + 2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 1 + 2x - 1 = 2x$

La fonction f est donc une solution particulière de (E).

3) Les solutions de l''équation (E) : $g(x) = Ce^{-2x} + x - \frac{1}{2}$
4) Conditions initiales $g(0) = 0$

$$g(0) = 0 \Leftrightarrow Ce^0 + 0 - \frac{1}{2} = C - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$$